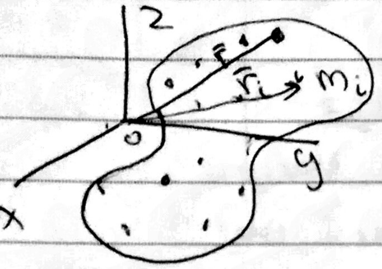
13/05/2019

Μάθημα 16ο

Στατική και Δυναμική Συστημάτων Υ.Σ.

Συστήματα Υ.Σ.

Διακριτά Υ.Σ. — Θεωρία Συνεχούς Μέσου

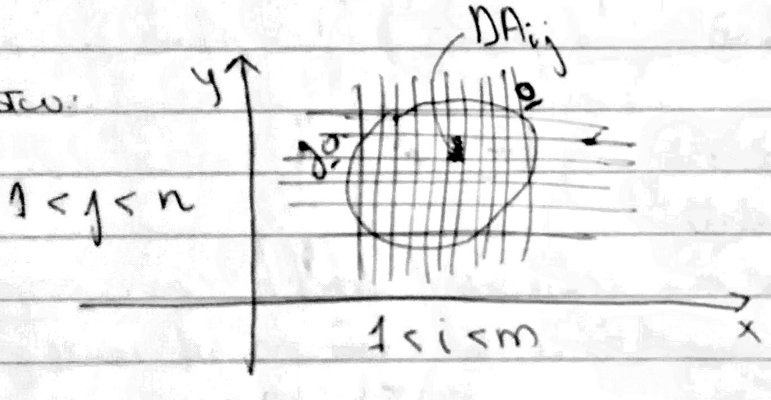


m_i, $1, 2, \ldots, i, \ldots, N$

Το θεωρώ ως σύστημα και προσπαθώ να βρω το κέντρο μάζας του

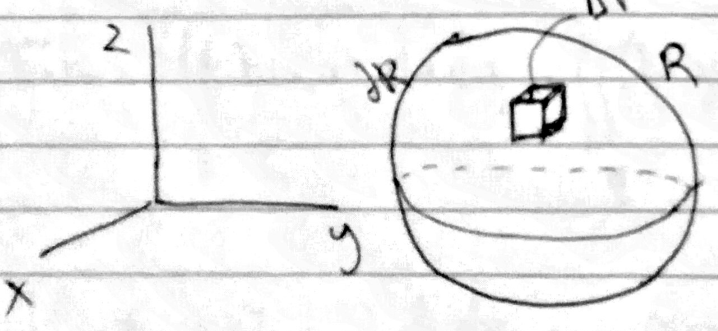
Γνωστό μας: $\bar{r}_s = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$

Έστω:



Θέλω να υπολογίσω το εμβαδόν του Ω → διαμέριση

$E_Ω = \iint_Ω dA$, εμβαδόν του χωρίου Ω, $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$



$V_R = \iiint_R dV$

Αλλαγή Μεταβλητών

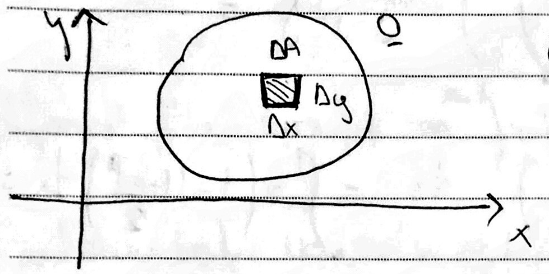
$$E_{\Omega} = \iint_{\Omega} dx\,dy = \iint_{\Omega'} r\,dr\,d\theta \quad , |J| = r$$

$$V_R = \iiint_R dx\,dy\,dz = \iiint_{R'} r\,dr\,d\theta\,dz \underset{\uparrow}{=} \iiint_{R''} r^2 \sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

κυλινδρικές

(Μέθοδοι καμπυλόγραμμων συντεταγμένων)

Πυκνότητα και μάζα



Ορίζεται ως μεταβολή της πυκνότητας:

$$\Delta p = \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

που δείχνει πως κατανέμεται η μάζα μέσα στην επιφάνεια ΔA

Άρα η πυκνότητα του Ω θα μπορούσε να δωθεί ως εξής:

$$\rho = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta A} = \frac{dm}{dA}$$

Είναι μία συνεχής συνάρτηση που εκφράζει την πυκνότητα. Είναι βαθμωτή και εξαρτάται από τον χώρο. $\bar{r}$

Άρα: $\rho = \rho(\bar{r})$

1ο) Έστω ρ = σταθερή παντού στο Ω.
Τότε η μάζα του Ω θα δίνεται από: $m = \rho \cdot E$ $\quad \left(m = \rho \cdot \overbrace{\iint_{\Omega} dA}^{E}\right)$

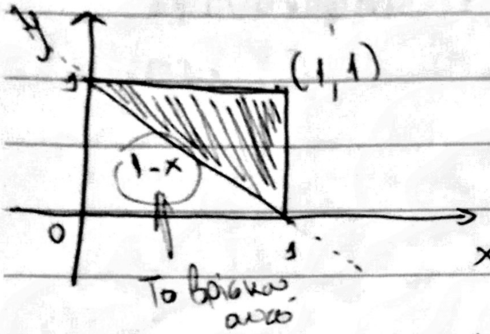
$$\Rightarrow \rho = \frac{m}{E}$$

2ος) Έστω $\rho \neq$ σταθερή αλλά $\rho = \rho(\bar{r}) = \rho(x,y)$

$$m = \iint_{\Omega} \rho(x,y)\,dA = \iint_{\Omega} \rho(x,y)\,dx\,dy$$

Αν ήταν διακριτό το σύστημα θα άθροιζα τις μάζες
Όμως εδώ είναι συνεχές και χρειάζεται να ορίσω την πυκνότητα
για να υπολογίσω τη μάζα.

Παράδειγμα



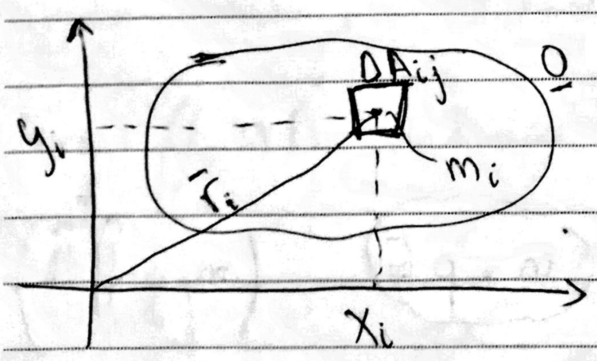
Η πυκνότητα του τριγώνου μεταβάλλεται σύμφωνα με την συνάρτηση $\rho(x,y) = x\cdot y$.
Να βρεθεί η μάζα του Ω

Απάντηση: $m = \iint_{\Omega} \rho(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xy\,dy\,dx =$

$= \int_0^1 x\left(\int_{1-x}^1 y\,dy \right) dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{1-x}^1 dx = \int_0 x\left(1 - \frac{(1-x)^2}{2}\right) dx = \frac{5}{24}$

Παρατήρηση: $m \neq \rho A$

Λεπτά και επίπεδα σώματα με συνεχή κατανομή μάζας.



Άρα η ροπή ως προς τον x-άξονα της στοιχειώδους επιφάνειας ΔA:

$$M_{ix} = \underbrace{\rho(x_{ij}, y_{ij})\,\Delta A_{ij}}_{m_i} y_{ij}$$

και αντίστοιχα στον άξονα y: $M_{iy} = \underbrace{\rho(x_{ij}, y_{ij})\,\Delta A_{ij}}_{m_i} x_{ij}$

Αθροίσματα:

$$\begin{cases} M_x = \lim\limits_{m,n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} \rho(x_{ij}, y_{ij})\, \Delta A_{ij}\, y_{ij} \\ \\ M_y = \lim\limits_{m,n\to\infty} \sum\limits_{i} \sum\limits_{j} \rho(x_{ij}, y_{ij})\, \Delta A_{ij}\, x_{ij} \end{cases}$$

Θέλω να πάρω όσο το δυνατόν μικρή διαμέριση γίνεται.

Άρα από τον ορισμό του ολοκληρώματος:

$$M_x = \iint_D \rho(x,y)\, y\, dA \quad , \quad M_y = \iint_D \rho(x,y)\, x\, dA$$

Φυσικά θα βρούμε τη μάζα: $m = \iint_D \rho(x,y)\, dA$

(Μπορούσαμε να ορίσουμε τη μάζα με συνεχή τρόπο)

Δηλαδή, το Κέντρο Μάζας του συστήματος, θα είναι:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_D x\,\rho(x,y)\, dA}{\iint_D \rho\, dA} \\ \bar{y} &= \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_D y\,\rho(x,y)\, dA}{\iint_D \rho\, dA} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\bar{r}_s = \frac{\iint_D \rho\,\bar{r}\, dA}{\iint_D \rho\, dA}}$$

όπου, $\rho = \rho(\bar{r})$ συνεχής βαθμωτή συνάρτηση.

<u>Παρατήρηση:</u> Αν ρ = σταθερή, δηλ. $\rho = c$, τότε:

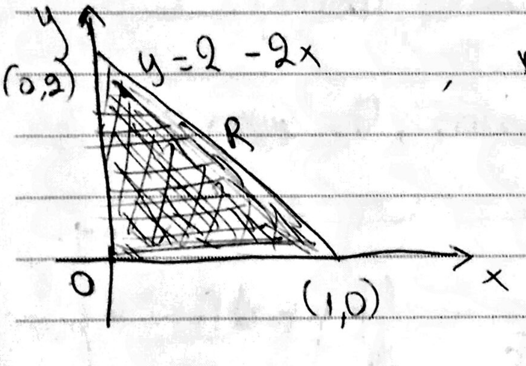
$$\bar{x} = \frac{\cancel{\rho} \iint_D x\, dA}{\cancel{\rho} \iint_D dA} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\cancel{\rho} \iint_D y\, dA}{\cancel{\rho} \iint_D dA}$$

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\, dA}{\iint_D dA}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y\, dA}{\iint_D dA}$$

<u>Άρα:</u> $$\bar{r}_s = \frac{\iint_D \bar{r}\, dA}{\iint_D dA} = \frac{\iint_D x\, dA}{\iint_D dA}\,\bar{i} + \frac{\iint_D y\, dA}{\iint_D dA}\,\bar{j}$$

Τότε το σημείο $\bar{r}_s = (\bar{x}, \bar{y})$ ονομάζεται κεντροειδές.

<u>Παράδειγμα:</u> Να βρεθεί το Κ.Μ. λεπτού και επιπέδου στρώματος σχήματος τριγώνου με κορυφές: $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$ και πυκνότητα $\rho(x,y) = 1 + 3x + y$.



$$m = \iint_R \rho\, dA = \iint_R (1 + 3x + y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 + 3x + y)\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^1 \left(y + 3xy + \frac{y^2}{2} \right)_0^{2-2x} dx = \frac{8}{3}$$

$$M_x = \iint_R y\, \rho(x,y)\, dA = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (y + 3xy + y^2)\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} + \frac{3xy^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right)_0^{2-2x} dx = \frac{11}{3}$$

και $M_y = \iint_R x \rho\, dA = 1$. Άρα κέντρο μάζας $\bar{r}_s = (\bar{x}, \bar{y}) = (3/8, 11/8)$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{3}{8}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{11}{8}$$